



## Actuarial education program

# COURS DE PROBABILITES ET CALCUL STOCHASTIQUE (Provisoire)

Semestre 2007 - 2008

## A) Objectifs pédagogiques

### 1. Objectif général

L'objectif de ce cours est de donner aux étudiants les bases formelles du calcul de probabilité et du calcul stochastique.

### 2. Objectifs spécifiques

2.1 Connaître et être capable de manipuler les lois usuelles de probabilité

2.2 Connaître les propriétés mathématiques des estimateurs et tests statistiques

2.3. Pouvoir appliquer ces résultats en mathématiques financières

## B) Evaluation

L'évaluation sera composée de contrôles continus (TD) et d'une composition finale

## C) Table des matières

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de probabilité</b>	<b>1</b>
1.1	Espace de probabilité . . . . .	1
1.2	Variable aléatoire . . . . .	3
1.3	Loi d'une variable aléatoire . . . . .	4
1.4	Espérance d'une variable aléatoire . . . . .	6
1.5	Indépendance . . . . .	9
1.5.1	Indépendance d'événements . . . . .	9
1.5.2	Indépendance de tribus . . . . .	9
1.5.3	Indépendance de variables aléatoires . . . . .	10
1.6	Espérance conditionnelle . . . . .	10
1.6.1	Conditionnement par rapport à un événement $B \in \mathcal{F}$ . . . . .	10
1.6.2	Conditionnement par rapport à une v.a. discrète $Y$ (à valeurs dans $D$ dénombrable) . . . . .	11
1.6.3	Conditionnement par rapport à une v.a. $Y$ continue? Cas général? . . . . .	11
1.6.4	Conditionnement par rapport à une tribu $\mathcal{G}$ . . . . .	11
1.7	Convergences de suites de variables aléatoires . . . . .	13
1.8	Processus aléatoire à temps discret . . . . .	16
1.9	Vecteur aléatoire . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Calcul stochastique</b>	<b>24</b>
2.1	Processus aléatoire à temps continu . . . . .	24
2.1.1	Processus à accroissements indépendants et stationnaires . . . . .	24
2.1.2	Mouvement brownien standard . . . . .	25
2.1.3	Processus gaussien . . . . .	27
2.1.4	Processus de Markov . . . . .	28
2.1.5	Martingale à temps continu . . . . .	29
2.2	Intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	32
2.3	Variation quadratique . . . . .	34
2.4	Intégrale stochastique (ou intégrale d'Itô) . . . . .	38
2.5	Formules d'Itô . . . . .	47
2.5.1	Formules de base . . . . .	47
2.5.2	Processus d'Itô (ou "semi-martingale continue") . . . . .	50
2.5.3	Retour à l'intégrale de Stratonovich . . . . .	51
2.5.4	Formules d'Itô généralisées . . . . .	53
2.5.5	Formule d'intégration par parties (IPP) . . . . .	54
2.6	Equations différentielles stochastiques (EDS) . . . . .	55
2.6.1	Equations homogènes en temps . . . . .	55
2.6.2	Equations inhomogènes en temps . . . . .	59

2.6.3	Equations linéaires . . . . .	60
2.6.4	Solution faible . . . . .	61
2.6.5	Martingale exponentielle . . . . .	62
2.7	Théorème de Girsanov . . . . .	63
2.8	Liens EDS $\leftrightarrow$ EDP . . . . .	69
2.8.1	Lien mouvement brownien $\leftrightarrow$ équation(s) de la chaleur . . . . .	69
2.8.2	Lien EDS $\leftrightarrow$ EDP paraboliques (formule de Feynman-Kac) . . . . .	71
2.9	Processus multidimensionnels . . . . .	76
2.10	Analyse et simulation numériques des EDS . . . . .	84
2.11	Pour conclure . . . . .	89

<b>Bibliographie</b>		<b>94</b>
----------------------	--	-----------